CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR

DEUXIEME EPREUVE A OPTION

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES M

(durée : 4 h 00 - coefficient : 10)

---==oOOo==---

Cette épreuve est réservée aux candidats ayant composé en mathématiques M - P lors de la première épreuve à option. Son choix implique impérativement une option analogue lors des épreuves orales.

Soit (E) l'espace vectoriel des fonctions réelles indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

Soient n et a deux réels quelconques.

On considère l'application Φ définie sur (E) qui à toute fonction f de (E) fait correspondre la fonction $\Phi(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad \left[\Phi(f)\right](x) = (x^2 + 1).f'(x) - (nx - a).f(x)$$

.../...

I. Montrer que Φ définit un endomorphisme de (E).

II. L'application Φ de (E) dans (E) est-elle surjective ? Est-elle injective ?

III. Déterminer $\mathrm{Ker}\Phi$.

IV. Montrer que tout réel λ est valeur propre de Φ.

Définir les fonctions propres correspondantes.

V. On suppose dans cette question : $n \in \mathbb{Z}$ et $a \neq 0$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (1 + x^2)^k \qquad \text{avec } k = \frac{n - m}{2} \qquad (m \in \mathbb{N})$$

Montrer que parmi les fonctions f telles que :

$$g = \Phi(f)$$

il existe une fonction non transcendante (c'est-à-dire obtenue par sommes, produits, quotients de puissances rationnelles de polynômes).

On ne demande pas d'expliciter précisément cette fonction mais seulement de montrer qu'elle a une forme non transcendante.

Dans quels cas cette fonction est-elle une fraction rationnelle ?

On commencera par traiter le cas particulier :

$$g(x) = \left[\Phi(f)\right](x) = (1 + x^2)^{\frac{n}{2} - 1} \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

Dans ce cas, on explicitera f de façon précise.

VI. Le réel n est maintenant supposé appartenir à $\mathbb{N}^*$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Soit (E_n) le sous-espace de (E) constitué des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Vérifier que :

$$f \in (E_n) \Longrightarrow \Phi(f) \in (E_n)$$

on peut ainsi, par une restriction de Φ, définir un endomorphisme Ψ de (E_n) tel que :

$$\Psi : (E_n) \longrightarrow (E_n)$$
$$f \longmapsto \Psi(f) = \Phi(f)$$

VII. Définir $\mathrm{Ker}\,\Psi$. Pour quelles valeurs de n et a Ψ est-il un automorphisme de (E_n) ?

VIII. Montrer que Ψ possède au plus une valeur propre.

IX. Former la matrice de Ψ suivant la base $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ de (E_n) définie par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad e_0(x) = 1 \qquad e_1(x) = x \ldots\ldots \qquad e_n(x) = x^n$$

X. Déterminer le polynôme caractéristique de cette matrice pour (n = 2) et (n = 3), a restant quelconque.

XI. On pose : n= 4 a = 0

Définir une base de $\mathrm{Ker}\,\Psi$ et une base de $\mathrm{Im}\,\Psi$.

D'après ces bases, étudier si le noyau de Ψ et l'image de Ψ sont deux sous-espaces supplémentaires de (E_4).

XII. Plus généralement, pour les doublets (n,a) pour lesquels Ψ n'est pas un automorphisme, étudier si $\mathrm{Ker}\,\Psi$ et $\mathrm{Im}\,\Psi$ sont deux sous-espaces supplémentaires de (E_n).
(on peut traiter cette question sans utiliser les matrices).

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail